

多波束测线问题的研究与优化

摘要

探究多波束测线问题，旨在优化海底地形的测量方法，提高水声测深的效率，促进海洋勘测和导航领域的进展。我们通过建立合理的数学模型，深入研究了与探测过程相关的测量参数之间的关联，着重分析了最佳测线的建模方法，并将这些研究应用到实际海域的测量中。

针对问题一，我们首先针对具有坡度的海底，定义了多波束测深相邻条带之间的重叠率与两艘船之间的距离、多波束测深覆盖宽度之间的关系。运用平面几何知识，我们建立了覆盖宽度与多波束换能器的开角、坡度以及海域中心点的海水深度之间的关系。同时，我们借助这些解析式关系，对具体的数值进行了详细的计算和绘图。

针对问题二，考虑矩形待测海域，我们通过在海域中心平面上切割图形，将立体图形转化为平面图。我们利用了切割图的倾斜角和海域深度，结合第一问题的研究成果，找到了多波束测深覆盖宽度与切割图的倾斜角、海域深度的关系，并利用测量船距海域中心点处的距离、测线方向夹角的数据，计算出了覆盖宽度的具体数值并进行可视化处理。

针对问题三，我们设计了一组平行于等高线的测线，并采用迭代算法，成功找到了具有最短测量长度的测线。我们需要 34 组测线来实现覆盖整个待测海域的目标，最短的测线总长度为 68 海里。

针对问题四，我们假设测线为南北走向且所有测线平行，将海域划分为 1001×801 的离散网格，采用离散的方法计算漏测海域百分比和重叠率超过 20% 的测线长度，并采用遗传算法对三个指标的加权平均值进行优化。

综上所述，我们通过构建多波束海底测深平面模型和坡面立体模型，解决了上述四个问题。我们在考虑不同的海底条件的基础上，详细分析了多波束换能器开角、海底坡角、覆盖宽度、重叠率等参数之间的计算关系，提供了多种测线设计方案并进行比较。这些方案为实际海底测深工程计算和测线设计提供了重要的实用参考价值。

关键字： 多波束测深，测线规划，多目标优化，遗传算法

目录

一、问题重述	3
1.1 背景	3
1.2 待解决问题	3
1.3 建模流程	3
二、模型假设	4
三、符号说明	5
四、模型的建立与求解	5
4.1 问题一的模型建立与求解	5
4.1.1 定义相邻条带重叠率	5
4.1.2 模型建立与求解	6
4.2 问题二的模型建立与求解	8
4.3 问题三的模型建立与求解	10
4.4 问题四的模型建立与求解	14
4.4.1 待测海域地形图	14
4.4.2 假设和数据说明	15
4.4.3 测线布局优化过程	15
4.4.4 结果分析	16
五、模型评价	19
5.1 模型的优点	19
5.2 模型的缺点	19
5.3 模型的改进	19
参考文献	21
附录 A 附件材料	22

一、问题重述

1.1 背景

当涉及水声系统时，单波束和多波束测深系统都扮演着重要的角色。单波束测深仪是较早开发的系统之一，至今仍然是最常用的水声系统之一。多波束测深技术，起源于 20 世纪 60 年代的美国海军研究项目，现已成为进行海洋地质勘测的不可或缺的技术工具，具有高精度和多功能的特点；它通过声波反射、散射和声学干涉原理，结合高密度声纳测量、精确声速校正等方法，实现对海底地形的精确测绘，开启了深海地貌学等领域的新应用 [1]。

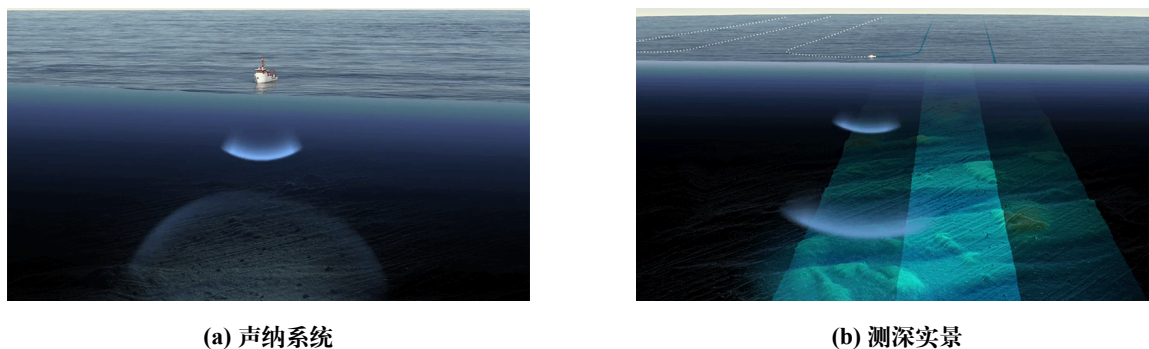


图 1 多波束测深系统，来源：<https://www.ga.gov.au/scientific-topics/marine/survey-techniques/bathymetry>

1.2 待解决问题

1. 完善相邻条带重叠率的定义，探讨覆盖宽度与相邻测量条带之间重叠率之间的关系。
2. 在海底为坡面的矩形待测海域中，研究多波束测深的覆盖宽度与不同位置之间的关系。
3. 在南北长 2 海里、东西宽 4 海里矩形海域设计一组测线，满足测量长度最短、可完全覆盖整个待测海域的测线，且相邻条带之间的重叠率满足 10% 至 20% 的要求。
4. 在南北长 5 海里、东西宽 4 海里的矩形海域内，根据单波束测深数据设计多波束测深船的测量线路。

1.3 建模流程

本论文围绕多波束测深的四个问题进行建模的流程如下图所示。

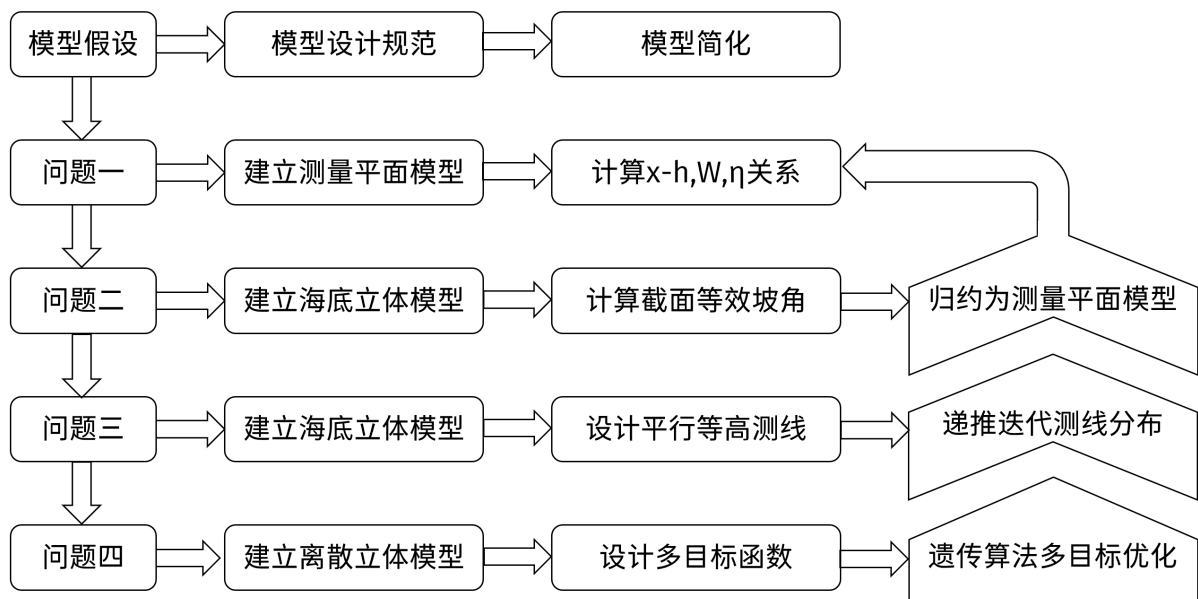


图 2 建模流程示意图

二、模型假设

1. 不考虑海面波动对深度、多波束换能器的开角的影响。
2. 待测海域深度均在测深仪器的测深上限内。
3. 根据多波束测深系统测量技术要求 [2]，测线设计为相互平行状。
4. 通过单波束测深获取的海水深度数据可靠。

三、符号说明

符号	意义
α	坡角（度）
α'	截面等效坡角（度）
θ	多波束换能器开角（度）
β	测线方向与坡面法向水平投影的夹角（度）
d	测线间距（米）
h	海水深度（米）
W	覆盖宽度（米）
ΔW	相邻测线间重叠覆盖宽度（米）
l	坡面距底面高度（米）
η	相邻条带重叠率

四、模型的建立与求解

4.1 问题一的模型建立与求解

4.1.1 定义相邻条带重叠率

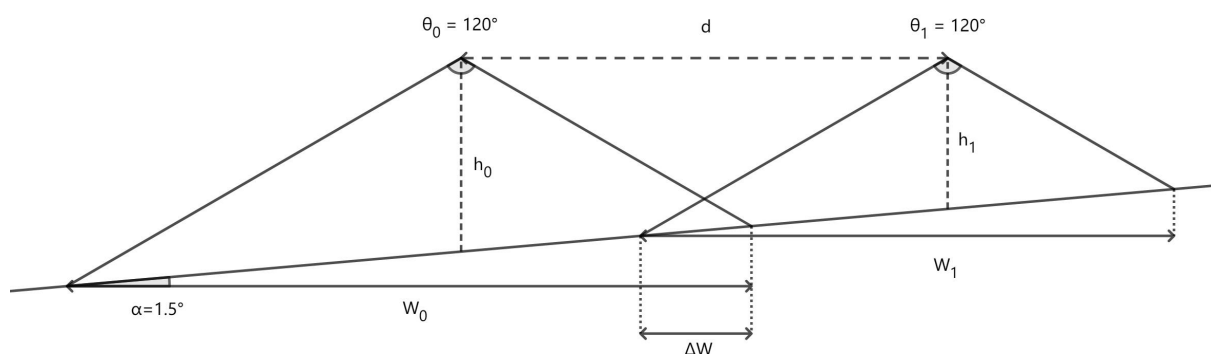


图3 两条测线截面图

在问题1中，我们设定测线距中心点处的位移正方向为水平向右，即坡面上升的水平方向。

由已知，若测线相互平行且海底地形平坦，则相邻条带之间的重叠率定义为 $\eta = 1 - \frac{d}{W}$ ，我们对有倾斜角度的海底坡面重新定义重叠率：相邻测线测量区域重叠部分的水平宽度与两条测线覆盖宽度的平均值的比值：

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{\Delta W}{(W_0 + W_1)/2} \\ &= \frac{2\Delta W}{(W_0 + W_1)}\end{aligned}\quad (1)$$

其中 W_0 和 W_1 为相邻两条测线的水平覆盖宽度， ΔW 是重叠覆盖部分的水平宽度，如图3所示。

4.1.2 模型建立与求解

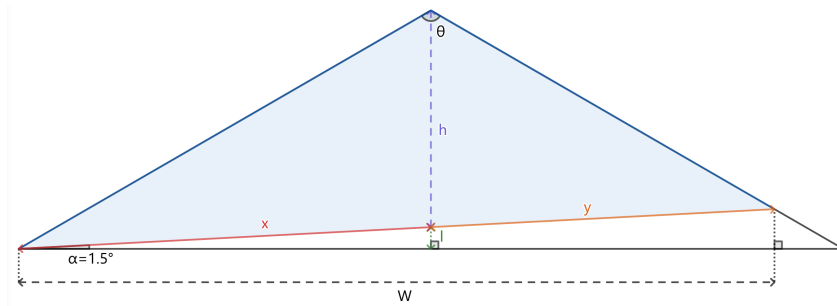


图4 多波束测深截面图

由图可以列出关系式：

$$\begin{aligned}\frac{W / \cos \alpha}{(h + l) / \cos \frac{\theta}{2}} &= \frac{\sin \theta}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \alpha \right)} \\ \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\theta}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)} &= \frac{h}{h + l} \cos \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

解得：

$$W = \frac{\cos^2 \alpha \sin \theta}{\cos \left(\frac{\theta}{2} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} + \alpha \right)} h \quad (2)$$

根据已知参数多波束换能器的开角 $\theta = 120^\circ$ ，坡度 $\alpha = 1.5^\circ$ ，海域中心点处的海水深度 $h_0 = 70$ m，计算海水深度 h 、覆盖宽度 W 、与前一条测线的重叠率 η 与测线距中心点处的距离 d 的数据关系，得出表格 1：

测线距中心点 处的距离/m	-800	-600	-400	-200	0	200	400	600	800
海水深度/m	90.95	85.71	80.47	75.24	70.00	64.76	59.53	54.29	49.05
覆盖宽度/m	315.71	297.53	279.35	261.17	242.99	224.81	206.63	188.45	170.27
与前一条测线 的重叠率/%	-	37.74	33.81	29.36	24.27	18.38	11.50	3.36	-6.44

表 1 与海域中心距离不同的海水深度、覆盖宽度、测线间重叠率

同时，我们对数据进行可视化处理：

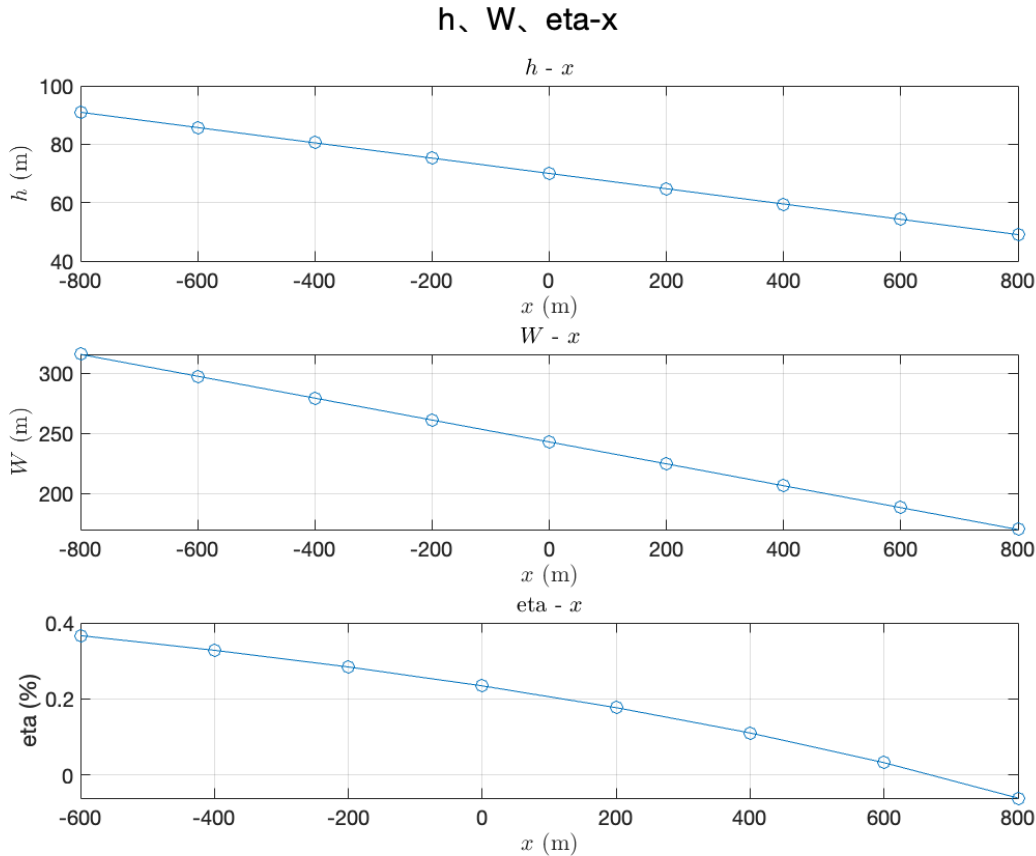


图 5 海水深度 h 、覆盖宽度 W 、与前一条测线的重叠率 η 与测线距中心点处的距离 x 关系图

据此，可以得出以下结论：在海底坡角固定的情况下，海水深度和覆盖宽度与测线距中心点处的距离呈线性关系，且在测线间距固定时，重叠率随海水深度增大而增大。

4.2 问题二的模型建立与求解

问题二中，我们需要对具有坡角 α 的矩形海域进行测深，从八个方向计算与海域中心距离不同的覆盖宽度。该问题在给定参数的情况下，拥有精确的唯一解，因此我们使用了立体几何建模的方法来精确计算给定 θ 、 α 、 β 和海域中心距离 x 时的覆盖宽度。

如图 5 所示，我们对问题 2 中的地形建立了空间直角坐标系 $O-xyz$ ，其中 x 轴正方向与海底坡面的法向在水平面上投影的方向相同， y 轴正方向设置为坡面等高线在水平面上的投影方向， z 轴正方向则为垂直于水平面向上。在建立好坐标系后，记测线与 x 轴正方向的夹角为 β ，测线方向在水平面的投影如图 6 中绿色向量所示。

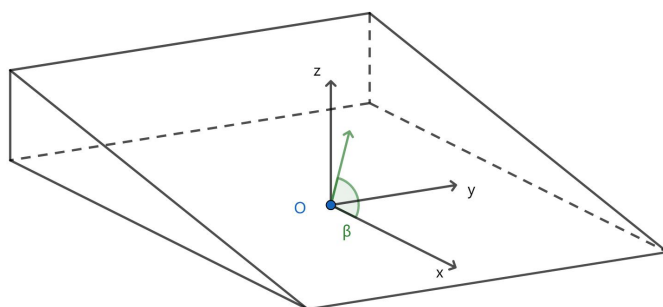


图 6 测线坐标系示意图

建立坐标系后，将测深船距海域中心的位移 d 正交分解到 x 和 y 方向，算得船只沿 x 轴方向的位移是 $d \cos \beta$ ，根据已知的海域中心深度 $h_0 = 110m$ 和海底坡角 $\alpha = 1.5^\circ$ ，计算出测深船位置的深度 h 。

$$\Delta h = d \tan \alpha \cos \beta$$

$$h = h_0 + \Delta h$$

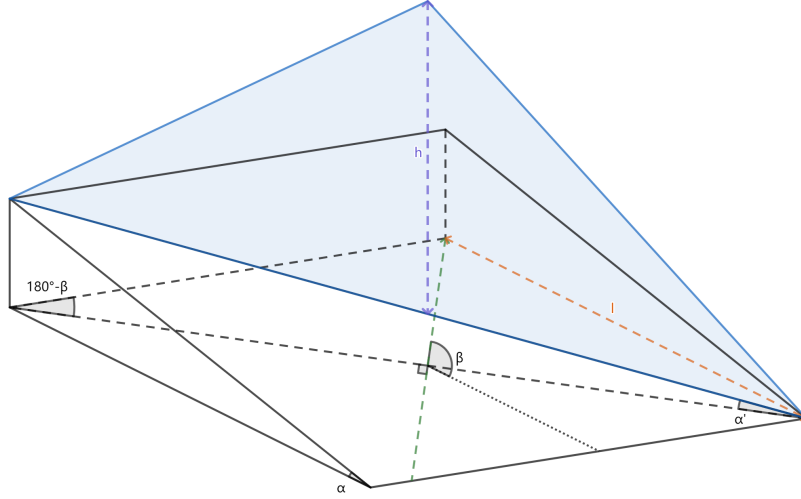


图 7 等效坡角示意图

由等式2，某海域处的覆盖宽度与多波束换能器开角 θ 、海底坡角 α 和海域深度 h 相关。如图 6 所示，底面绿色虚线为测线方向，蓝色三角形区域为测量面，由定义可得测线方向与测量面正交，而测量面与海底坡面相交的直线与水平面的夹角即为此时的等效坡角 α' 。如图 6 所示，设坡面一边长为 l ，在底面进行三角计算可得：

$$\tan \alpha' = \frac{l \tan \alpha}{l / \sin (180^\circ - \beta)}$$

将 α' 、 h 分别代替问题 1 中的 α 、 h 可解得：

$$W = \frac{\cos^2 \alpha' \sin \theta}{\cos \left(\frac{\theta}{2} - \alpha' \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} + \alpha' \right)} h \quad (3)$$

其中：

$$h = h_0 + d \tan \alpha \cos \beta$$

$$\alpha' = |\arctan(\tan \alpha \sin \beta)|$$

代入已知数据到等式3，计算覆盖宽度 W 与测量船距离海域中心点的距离 x 、测线方向夹角 β 关系，得出表格 2：

覆盖宽度/m		测量船距海域中心点的距离/海里							
		0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
测线 方向 夹角 / $^{\circ}$	0	416.835	467.372	517.909	568.447	618.984	669.522	720.059	770.596
	45	416.692	452.415	488.138	523.861	559.584	595.307	631.030	666.753
	90	416.549	416.549	416.549	416.549	416.549	416.549	416.549	416.549
	135	416.692	380.969	345.246	309.523	273.800	238.076	202.353	166.630
	180	416.835	366.297	315.760	265.223	214.685	164.148	113.610	63.073
	225	416.692	380.969	345.246	309.523	273.800	238.076	202.353	166.630
	270	416.549	416.549	416.549	416.549	416.549	416.549	416.549	416.549
	315	416.692	452.415	488.138	523.861	559.584	595.307	631.030	666.753

表 2 不同海域中心距离、测线方向夹角下的覆盖宽度

同时，对表格数据进行可视化处理，可以发现覆盖宽度 W 在测线方向 β 固定时随位移 x 单调变化：当测线方向有沿坡面上升方向的分量时，覆盖宽度随位移增大而减小，当测线方向有沿坡面下降方向的分量时，覆盖宽度随位移增大而增大。而当位移 x 固定时，覆盖宽度 W 随 β 的增大而先减小后增大。

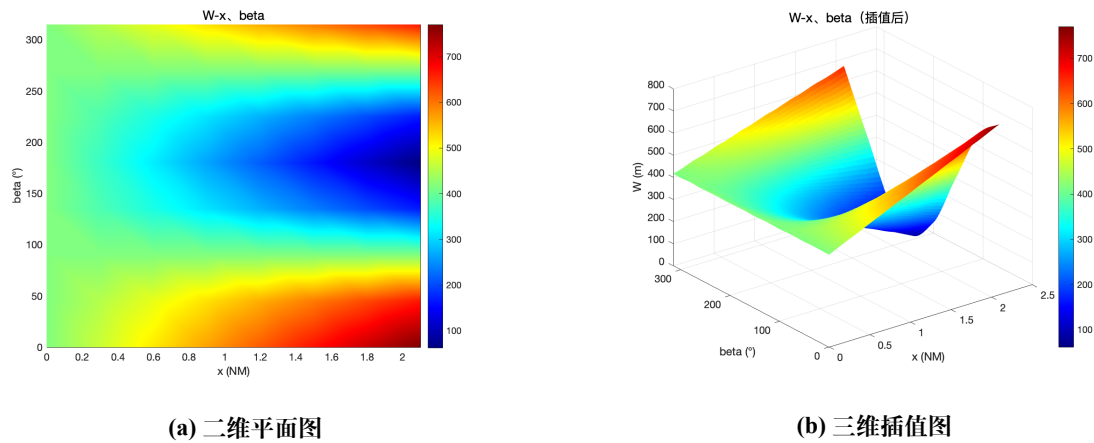


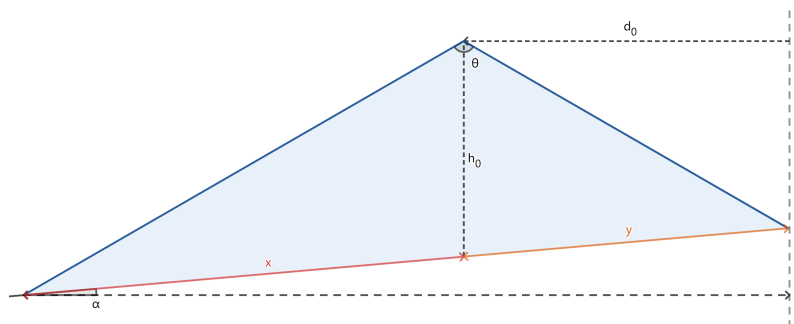
图 8 覆盖宽度 W 与测量船距离海域中心点的距离 x 、测线方向夹角 β 关系图

4.3 问题三的建立模型与求解

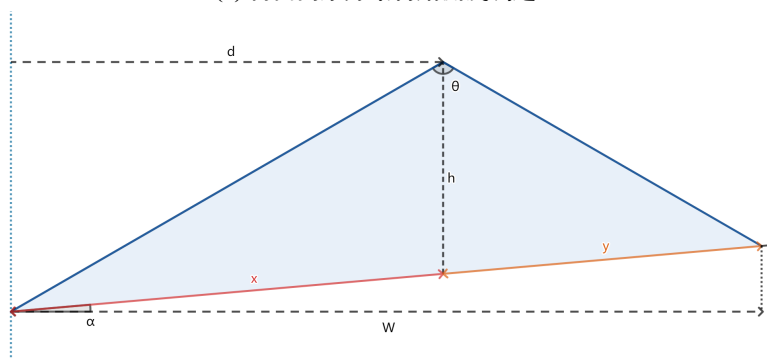
为了找到一组测量长度最短、完全覆盖整个海域、相邻条带之间的重叠率在指定范围内的测线，我们根据中华人民共和国交通运输行业对多波束测深系统测量技术的要求

[2], 设计了两组平行于等高线的南北走向的测线。

首先需要确定第一条测线, 我们分别考虑从西方向和东方向开始的情况进行分类讨论, 确保第一条测线的覆盖宽度刚好覆盖到海域的边缘, 如图 8 所示。在该问题中, 测线的位置由测线到海域东部边缘的距离 d 确定。



(a) 自西向东方案初始测线确定



(b) 自东向西方案初始测线确定

图 9 两种方案下初始测线位置的确定

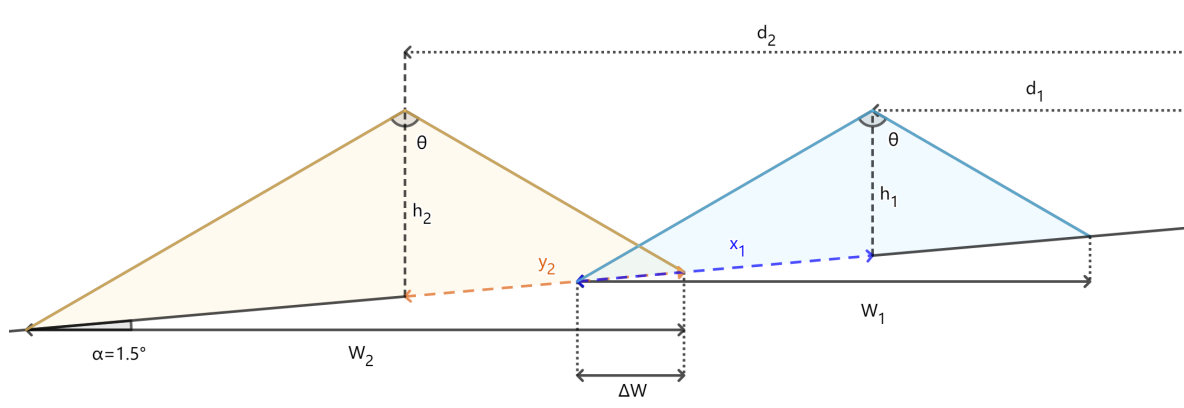


图 10 相邻测线位置递推示意图

其次, 为保证航线的总里程最短并能完全覆盖整个海域, 我们令相邻两条测线之间的重叠率固定为 10%, 通过几何关系相邻测线位置的递推式。重复递推过程, 直到整个海域被完全覆盖, 递推结束。由图 9 可以列出等式:

$$\begin{aligned}
\Delta W &= (x_1 + y_1) \cos \alpha - (d_2 - d_1) \\
\eta &= \frac{2\Delta W}{W_1 + W_2} \\
h_1 &= h_0 + d_1 \tan \alpha \\
h_2 &= h_0 + d_2 \tan \alpha \\
W_i &= nh_i, i = 1, 2 \\
x_1 &= mh_1 \\
y_2 &= \frac{W_2}{\cos \alpha} - mh_2 \\
(x_1 + y_2) \cos \alpha &= \frac{1}{2} (W_1 + W_2) \eta + (d_2 - d_1) \\
\Delta d &= d_2 - d_1
\end{aligned}$$

其中:

$$m = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \left(\alpha + \frac{\theta}{2} \right)}, \quad n = \frac{\cos^2 \alpha \sin \theta}{\cos \left(\frac{\theta}{2} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} + \alpha \right)}$$

代入题中数据, 解得:

$$d_2 = \frac{n(1 - \eta)h_0 + \left(1 + m \sin \alpha - \frac{1}{2}ny \tan \alpha\right)}{\left(1 + m \sin \alpha + \frac{1}{2}ny \tan \alpha - n \tan \alpha\right)} d_1$$

由此可以得到一般递推式:

$$d_{i+1} = \frac{n(1 - \eta)h_0 + \left(1 + m \sin \alpha - \frac{1}{2}ny \tan \alpha\right)}{\left(1 + m \sin \alpha + \frac{1}{2}ny \tan \alpha - n \tan \alpha\right)} d_i \quad (4)$$

以下分别是自东向西和自西向东两种情况所计算得出的测线距最东测边缘的距离和测线总长度:

自东向西测线方案 (单位: 米)									
d1	d2	d3	d4	d5	d6	d7	d8	d9	d10
22.52	66.72	114.67	166.71	223.18	284.45	350.94	423.09	501.38	586.34
d11	d12	d13	d14	d15	d16	d17	d18	d19	d20
678.52	778.55	887.10	1004.88	1132.69	1271.37	1421.86	1585.16	1762.36	1954.64
d21	d22	d23	d24	d25	d26	d27	d28	d29	d30
2163.29	2389.69	2635.37	2901.95	3191.23	3505.12	3845.74	4215.34	4616.40	5051.60
d31	d32	d33	d34	d34 边界			总长度		
5523.84	6036.28	6592.33	7195.71	7561.18			125936		

表 3 自东向西测线方案 (单位: 米)

自西向东测线方案 (单位: 米)									
d1	d2	d3	d4	d5	d6	d7	d8	d9	d10
7049.48	6457.57	5912.09	5409.4	4946.13	4519.21	4125.77	3763.19	3429.05	3121.12
d11	d12	d13	d14	d15	d16	d17	d18	d19	d20
2837.34	2575.83	2334.82	2112.72	1908.04	1719.42	1545.59	1385.39	1237.76	1101.71
d21	d22	d23	d24	d25	d26	d27	d28	d29	d30
976.334	860.79	754.309	656.18	565.749	482.41	405.608	334.831	269.605	209.495
d31	d32	d33	d34	d34 边界			总长度		
154.101	103.051	56.0053	12.6499	-9.435			125936		

表 4 自西向东测线方案 (单位: 米)

根据所呈现的表格数据, 为满足待测海域的测量需求, 我们需要展开总计 34 条测线, 总测线长度为 125,936 米, 合 68 海里。

以下是测线路径图, 可以看出由浅到深, 测线间距逐渐增大:

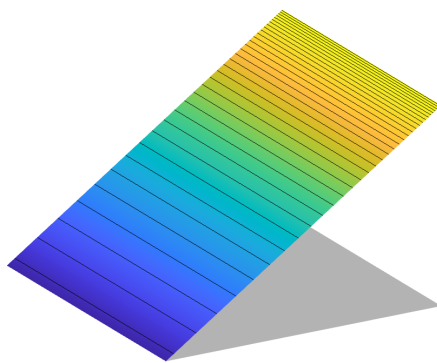


图 11 测线路径示意图

4.4 问题四的模型建立与求解

4.4.1 待测海域地形图

我们首先将海域深度数据进行可视化处理，可以看出待测海域呈鞍状，西南角和东北角海域浅，西北角和东南角海域深。

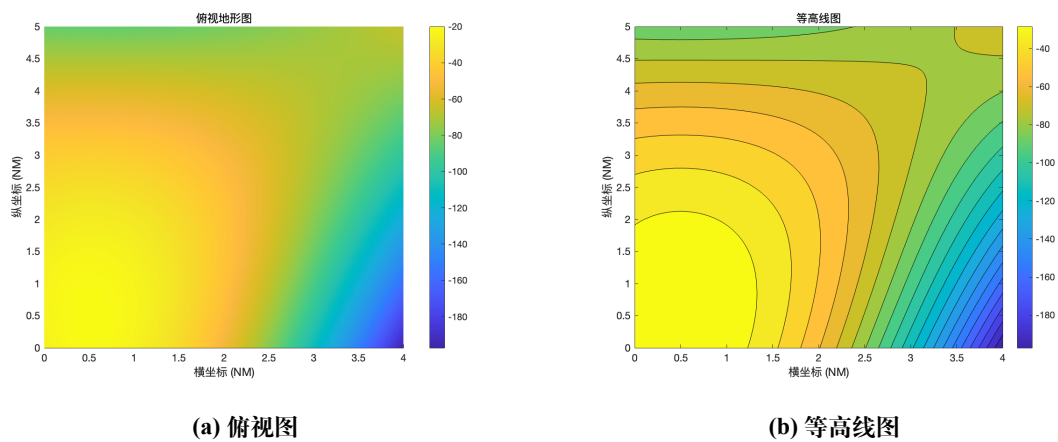
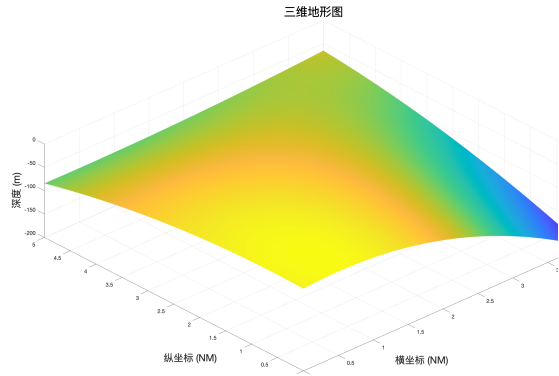
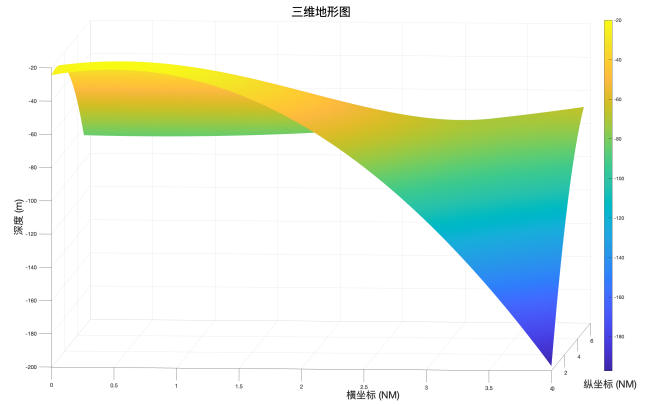


图 12 海底深度分布图与等高线图



(a) 三维地形图 1



(b) 三维地形图 2

图 13 海底地形三维建模

4.4.2 假设和数据说明

1. 离散化海域：将待测海域抽象为一个 1001×801 的矩阵，并对从测量附件中获取的深度数据进行插值处理，以得到离散化后的海域各点的深度信息。
2. 测线布局假设：假设所有测线均朝南北方向布设，并穿越整个海域，即每条测线与矩阵中的一列相对应。
3. 覆盖率和重叠率跟踪：使用了一个大小相同的矩阵，称之为“coverage”，用于记录每个海域点是否被测量覆盖；维护一个可变长数组“overlap_points”，用于存储所有测线上重叠率超过 20% 的点的坐标信息。
4. 参数定义：

- 漏测海区百分比 = $\frac{\text{coverage 矩阵中有记录的点数}}{\text{coverage 矩阵总点数}}$
- 所有测线上重叠率超过 20% 的点数：overlap_points 的长度
- 测线总长度 = 测线数 $\times$ 单次测线里程

4.4.3 测线布局优化过程

对于问题四，考虑到实际地形的不规则性，我们在将海底地形离散化后，基于以下过程进行求解。

1. 目标函数：对于每个布线方案，计算目标函数值，该值是以下三个指标的平均值：漏测海域百分比，所有测线上重叠率超过 20% 的点数以及测线总长度。
2. 每个布线方案的优化过程分为以下步骤：首先，我们按从左到右的顺序遍历每一条测线。其次，对于每一条测线，我们从北到南遍历该测线上的每个点。对于每个点，我们执行以下两个关键步骤：

- 计算该点的覆盖宽度：考虑测线附近与该点位于同一行的点，利用式5算出附近

点海底处到测线的垂线与竖直方向的夹角 γ ，若 γ 小于 60° ，则视为该点在覆盖宽度内。

$$\gamma = \arctan\left(\frac{d}{D}\right) \quad (5)$$

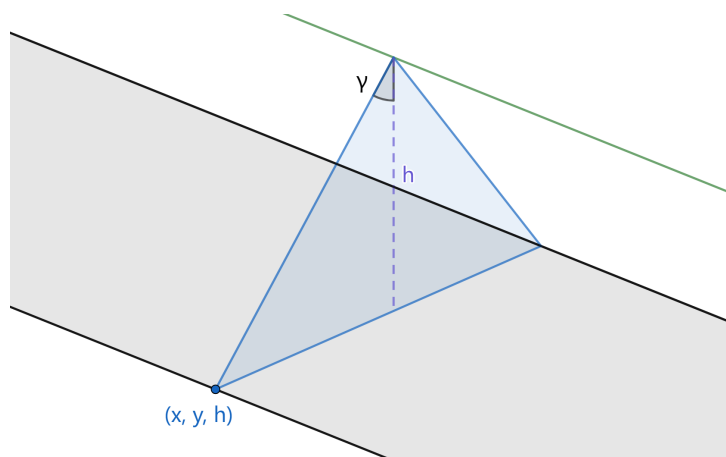


图 14 利用夹角 γ 判定海底任意点是否在覆盖宽度内

- 计算该点的重叠率：考虑左边的相邻测线上与该点位于同一行的点，计算重叠率。若重叠率大于 20%，则记录该点的坐标信息在“overlap_points”数组中。
3. 采用遗传算法优化：在优化过程中，调整测线的数量和每条测线在海域矩阵中的横坐标，以最小化目标函数值。

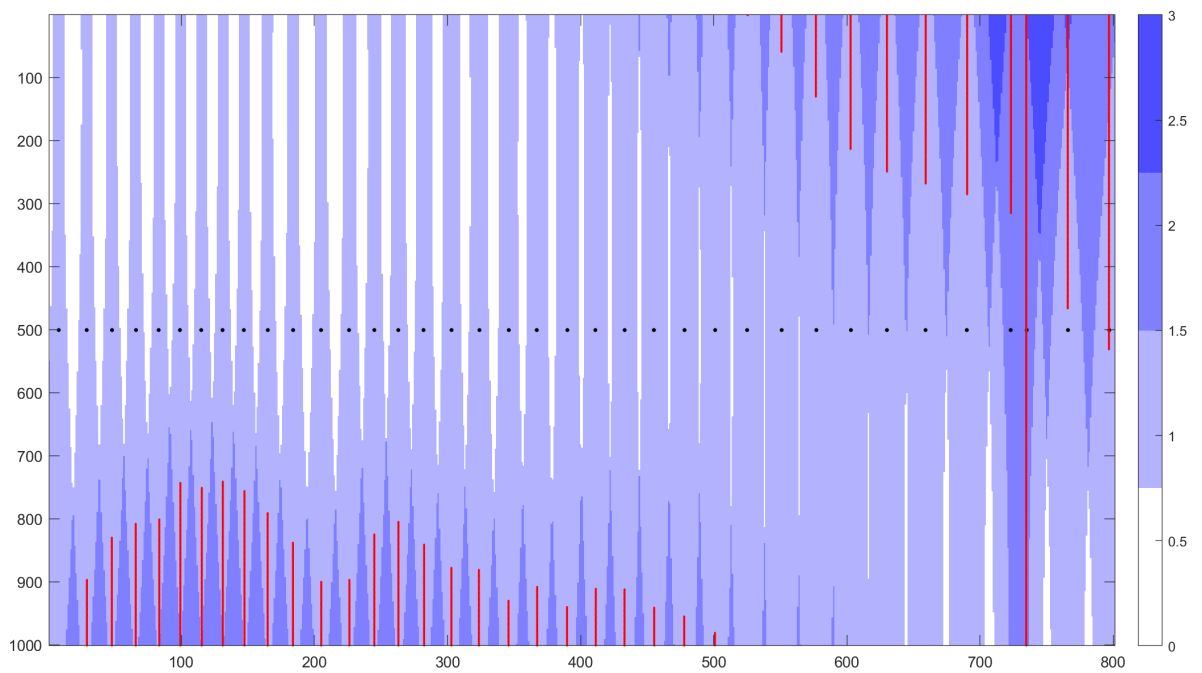
4.4.4 结果分析

我们对目标的权重进行了多次调整分析。注意到此处的三个指标是制衡关系，对于不同情况的背景，各指标的重要性可能会有所不同。在未知指标间相对重要关系的情况下，我们改变权重，进行了多次求解，得到的结果如下表所示：

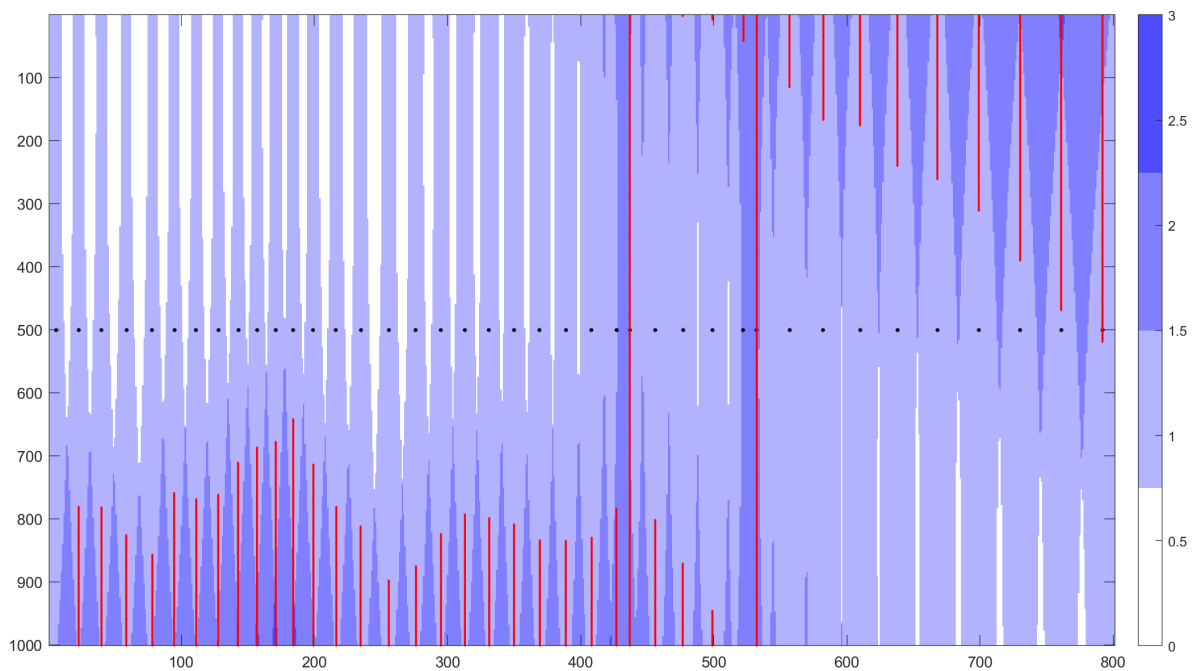
漏测率/%	重叠长度/海里	测线总长度/海里
5.48	126.085	265
9.03	98.065	240
11.00	51.475	200
11.36	55.565	200
13.23	33.585	185
13.96	40.625	190
13.97	35.535	185
14.46	29.43	180
15.40	24.690	175
16.40	24.925	175
16.91	139.955	250
17.19	30.595	175
19.30	133.890	250
19.74	19.240	165

表 5 遗传算法设计测线方案的三项指标

我们对布线方案进行了可视化处理，能够清晰地了解测量覆盖和重叠情况。下图为测线及其覆盖范围的俯视图。在图中，浅蓝色区域代表已测量到的区域，深蓝色区域表示存在重叠的区域，红色区域表示具有超过 20% 重叠率的测线部分，图像中央的黑色点代表测线的中央位置。



(a) 方案一，漏测率: 13.97%，重叠长度: 35.535 海里, 测线总长度: 185 海里



(b) 方案二，漏测率: 11.00%，重叠长度: 51.475 海里, 测线总长度: 200 海里

图 15 测线方案可视化

观察上图可知，海域的西南片区由于深度较浅，产生了较多的漏测现象。针对该种

现象，一种可能的解决方案是沿海域南部边界向海域中心增设若干组“半程”测线，用于弥补因海底深度变浅、覆盖宽度变窄导致的部分漏测现象。

五、模型评价

5.1 模型的优点

1. 我们按照多波束测量标准，设计了若干种平行测线方案，平行测线方案拥有极高的简洁性和可行性，适宜投入实际测量工程。
2. 在第一和第二问中，我们充分利用了平面几何和立体几何知识，成功地推导出了未知量之间的精确关系解析式。这些解析式不仅提供了问题的准确数学描述，还具有广泛的普适性，可适用于类似的问题领域。
3. 在第三问中，我们以测绘标准为依据，设计了平行于等高线的测线，并巧妙地运用迭代算法求解。这种方法既确保了解决方案的准确性，也充分考虑了实际应用的实用性。通过与测绘标准的精确结合，我们的研究为相关领域的专业人员提供了一种高效解决问题的方法。
4. 在第四问中，我们采用了创新性的平行线路设计，并成功地采用遗传算法进行求解。这一独特的方法不仅简化了问题，还提供了一种全新的解决问题的思路。我们的研究充分展示了创新和多样性，并在数学建模领域提供了一种有前景的问题解决途径。
5. 我们的研究充分利用了可视化方法，以直观的方式呈现了研究结果，提高了研究的可解释性，使得结果更易于理解。
6. 我们的解决方案充分考虑了实际应用的需求和标准，确保了研究的实用性和可行性，所得出的方案符合行业规范，适合投入实际使用。

5.2 模型的缺点

1. 我们未考虑真实海面上水波对深度、测线路径以及多波束换能器的发射角度摆动可能产生的影响。
2. 在解决问题四时，我们出于模型简化与规范目的采用了平行测线设计方案，导致了一定的漏测，可能并非最佳方案。

5.3 模型的改进

1. 为了更准确地模拟真实海洋环境，我们可以考虑水波对深度的影响。一种方法是引入半圆柱桶模型，通过改变不同位置的深度来模拟真实的海面。这个改进将使我们的模型更接近实际情况，并有助于提高深度数据的准确性 [3]。
2. 考虑真实海面对多波束探测系统的影响。这包括滚转偏移、俯仰偏移、偏航偏移等因素。我们可以利用算法对这些影响进行校正，以确保测量数据的准确性 [1]。

3. 进一步优化测线路径的设计方案。通过考虑沿等高线测量等更多的设计选项，并运用多种优化算法进行求解，我们可以找到更有效的路径，以提高数据采集的效率和质量。这个改进更具实际应用价值，同时也有助于更好地满足测绘需求。

参考文献

- [1] Zhao, Dineng & Yang, Fanlin & Wu, Ziyin & Zhu, Chao & Liu, Hongxia. (2020). Chapter 2 Multi-beam Bathymetric Technology.
- [2] 中华人民共和国交通运输部. JT/T 790—2010 多波束测深系统测量技术要求 [S]. 北京: 中国标准出版社, 2010.
- [3] Xiang-jian, M., Wen, X., Bin-jian, S., Xinxin, G., Xin-yu, L., & Yushi, L. (2020). An Imaging Algorithm for High-speed Side-scan Sonar Based on Multi-beam Forming Technology. Global Oceans 2020: Singapore –U.S. Gulf Coast, 1-6.

附录 A 附件材料

附件.rar

| result1.xlsx

| result2.xlsx

|—figures

| 4-res1.png

| 4-res2.png

| flowchart.png

| W-x、beta 三维.png

| 三维地形 1.png

| 三维地形 2.png

| 俯视图.png

| 声纳系统.png

| 定义相邻条带重叠率.jpg

| 测深实景.png

| 测线路径.png

| 等高线图.png

| 表 1 可视化.png

| 表 2 可视化.png

| 问题 1-1.png

| 问题 2-1.jpg

| 问题 2-2.png

| 问题 3-1.png

| 问题 3-2.png

| 问题 3-3.png

| 问题 4-1.png

|—matlab-地形三维绘图

| Contour_ThreeD.m

| data.xlsx

| TableVisual.m

| trace.m

|—matlab-第四问测线设计

| B4gradient.m

| interplot.m

| MyGA.m

- | plot_plane.m
- | trace-group-x-axis-positions-1.mat
- └─ trace-group-x-axis-positions-2.mat